

## MODELO INESTACIONARIO PARA ESTIMACIÓN DE PERFORMANCES DE PROPULSORES DE PLASMA PULSANTE ABLATIVOS.

C. A. Vitulich, M. M. Saravia, H. H. Brito  
Centro de Investigaciones Aplicadas – Fuerza Aérea Argentina  
Av. Fuerza Aérea Km 5,5 - Córdoba - Córdoba - Argentina.  
Email: carlosalbertovitulich@gmail.com

### RESUMEN

*Como parte de las tareas llevadas a cabo en el marco del proyecto PROPELSAT (PIDDEF 33/11) se desarrolló e implementó un modelo inestacionario que simula el flujo de gases ionizados que se da dentro de la cámara de reacción de un propulsor de plasma pulsante ablativo (PPPA).*

*El modelo es aplicable a motores de alimentación trasera (breech-fed) y de electrodos coaxiales. Las variables que caracterizan el modelo son promediadas dentro de un volumen de control definido por la cámara de reacción y su evolución se determina mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se consideró un modelo de ionización parcial del gas y la variación de las conductividades con la temperatura y el nivel de ionización. Además cuenta con una serie de hipótesis que se plantearon para simplificar la modelización del problema. El problema se resolvió numéricamente a través de un código desarrollado para tal fin en lenguaje Octave.*

*Los resultados arrojados por el código fueron comparados con los obtenidos en una serie de ensayos del PPPA P4S-1 (Modelo de Desarrollo), lo que permitió, mediante identificación de parámetros, calibrar el software y validar el modelo. A través de los datos de salida es posible hacer análisis de performance para diseños de PPPA, dentro de las restricciones del modelo.*

**Palabras clave:** Propulsión eléctrica, plasma, microsátélites, simulación.

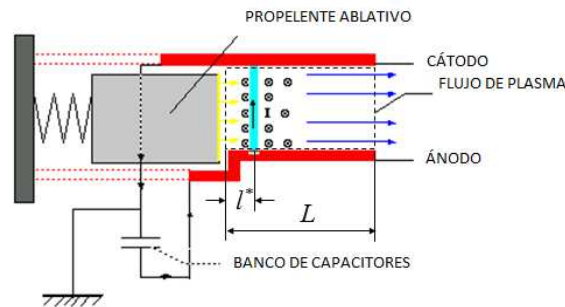
### INTRODUCCIÓN

Los propulsores de plasma pulsantes ablativos (PPPA) son dispositivos de propulsión eléctrica en los cuales el propelente sólido es ablacionado y los gases resultantes son acelerados electromagnéticamente. Éstos han sido estudiados empíricamente por más de cuatro décadas para su aplicación en misiones espaciales, debido a ventajas como su baja masa y los bajos niveles de potencia requeridos, ofreciendo altas velocidades de escape del propelente.

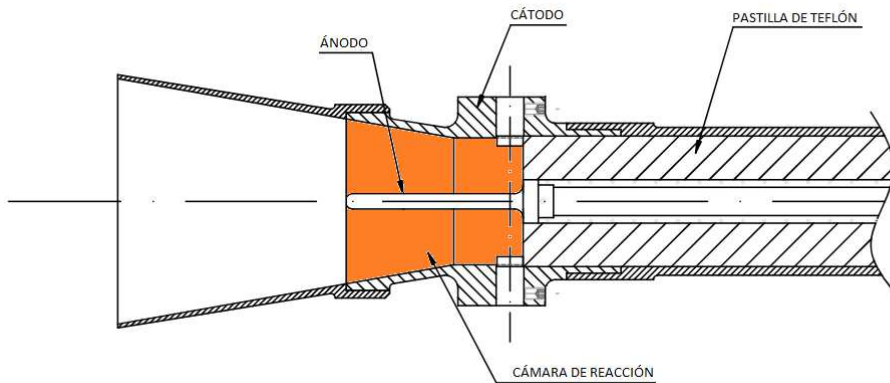
Un PPPA se compone, básicamente, de un banco de capacitores y dos electrodos, entre los cuales se ubica el combustible a ablacionar (**Figura 1**). A continuación se detallan sintéticamente los fenómenos involucrados en el desarrollo de una descarga en un motor de plasma pulsante:

La descarga comienza con el cierre del circuito que conecta un banco de capacitores con los electrodos que forman la cámara de reacción. En este punto actúan las bujías ubicadas en el cátodo, cuyas chispas liberan conductores libres que permiten iniciar la reacción. Se forma un arco eléctrico y una pequeña cantidad del teflón es evaporada y ionizada. Las partículas ionizadas permiten un incremento de la corriente eléctrica. El arco de plasma genera un campo electromagnético azimutal que interactúa con la corriente eléctrica que circula entre los electrodos, lo que tiene como consecuencia una fuerza de Lorentz que acelera las partículas ionizadas, impulsándolas fuera de la cámara.

En el presente trabajo se desarrolla una herramienta para el análisis de performances y diseño de PPPA de electrodos coaxiales (**Figura 2**). Este desarrollo se encuentra enmarcado en un proyecto cuyo objetivo incluye la utilización de estos motores para la realización de maniobras orbitales y station-keeping de un microsátélite [1,2].



**Figura 1.** Componentes y disposición de un PPPA.



**Figura 2.** Esquema de motor de plasma de electrodos coaxiales.

## METODOLOGÍA

### Hipótesis simplificativas

Para la modelización del problema, se realizaron una serie de hipótesis simplificativas, las cuales se detallan a continuación:

1. La resistencia del plasma depende de un área transversal a la corriente, a través de la cual se da la conducción de cargas. No se consideró la superficie correspondiente al espesor del arco eléctrico solamente, sino la longitud total de la cámara de reacción. Tal simplificación se justifica en el hecho de que las partículas ionizadas poseen una velocidad tan elevada, que llenan la cámara de reacción en su totalidad en los primeros instantes posteriores a la ablación de masa, por lo que puede considerarse que la conducción se lleva a cabo abarcando toda la extensión de dicha cámara.
2. Se consideró que las partículas ionizadas resultantes de la ablación, al ionizarse liberan solamente un electrón.
3. La conductividad térmica y eléctrica del gas varían con la temperatura y la ionización, [3,4].
4. La expansión gas-dinámica en la tobera del motor no fue tomada en cuenta dentro del cálculo, debido a su aporte despreciable con respecto al empuje total, pero sí tuvo en cuenta la evacuación de los gases por efectos de la presión.
5. El coeficiente de empuje gas dinámico fue tomado como igual a la unidad.
6. Con respecto al calor necesario para la ablación, solo se transmite por conducción, despreciando así el aporte por radiación.
7. El efecto de las vainas de potencial fue despreciado.

### Ecuaciones que gobiernan el problema

Las ecuaciones utilizadas son las planteadas en [5], con ciertas modificaciones:

### Conservación de la carga eléctrica en el volumen de control:

$$\frac{dQ}{dt} = -I \quad (1)$$

Donde  $Q$  es la carga eléctrica en el volumen de control, e  $I$  es la corriente eléctrica.

### Variación de la corriente:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{(L_C + \lambda l^*)} \left[ \frac{Q}{C} - \lambda \bar{v} I - \bar{R}(\bar{T}) I \right] \quad (2)$$

Donde  $L_C$  es la inductancia de los conductores externos,  $\lambda$  gradiente de inductancia,  $l^*$  es la posición del anillo de plasma,  $\bar{v}$  es la velocidad del frente ionizado,  $\bar{R}$  la resistencia y  $\bar{T}$  la temperatura media en el volumen de control.

### Variación de la masa en el volumen de control:

$$\frac{dm_v}{dt} = \frac{kA_A (T - T_A)}{H_A \Delta x_{cond}} - \frac{1}{2\nu} \lambda I^2 - c_D \bar{P} A^* \quad (3)$$

Donde  $m_v$  es la masa instantánea en el volumen de control,  $k$  es la conductividad térmica,  $A_A$  es área de ablación,  $T$  es la temperatura del arco,  $T_A$  es la temperatura de ablación,  $H_A$  es la entalpía de ablación,  $\Delta x_{cond}$  es el espesor de conductividad térmica,  $c_D$  es coeficiente de descarga,  $\bar{P}$  es la presión media en el volumen de control y  $A^*$  es el área crítica (en este caso es constante).

### Conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_v \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{1}{2} \lambda I^2 + \bar{P} A^* \quad (4)$$

### Conservación de la Energía:

Con respecto a la conservación de la energía, en [5] no es tenido en cuenta el transporte de calor por flujo convectivo, por lo la ecuación posee la siguiente forma:

$$m_v c_v \frac{d\bar{T}}{dt} = \bar{R}(\bar{T}) I^2 - \left( (\varepsilon_r A_r) \sigma \bar{T}^4 + k A_A \frac{(T - T_A)}{\Delta x_{cond}} \right)$$

Pero, con objetivo de completar el modelo, en la ecuación (5) se incluye el término de transporte de masa:

$$m_v c_v \frac{d\bar{T}}{dt} = \bar{R}(\bar{T}) I^2 - \left( (\varepsilon_r A_r) \sigma \bar{T}^4 + k A_A \frac{(T - T_A)}{\Delta x_{cond}} \right) + \dot{m}_A c_v T_A - \dot{m}_s c_v \bar{T} \quad (5)$$

Donde  $c_v$  es el calor específico a volumen constante,  $\varepsilon_r$  es la emisividad térmica en el vacío, y  $A_r$  es el área de radiación,  $\sigma$  es la constante de Stephan-Boltzmann,  $\dot{m}_A$  y  $\dot{m}_s$  son el caudal de masa

ablacionada y el caudal másico de salida,  $c_v$  es el calor específico del gas a volumen constante y  $\bar{T}$  es la temperatura media dentro del volumen de control.

#### Movimiento de la lámina de plasma:

$$\frac{dl^*}{dt} = \bar{v} \quad (6)$$

Donde  $l^*$  es la longitud de la cámara de reacción.

#### Ablación de la masa:

$$\frac{dm_A}{dt} = \frac{kA_A}{H_A} \frac{(T - T_A)}{\Delta x_{cond}} \quad (7)$$

Donde  $m_A$  es la masa ablacionada.

#### Variación adimensional del Impulso Total:

$$\frac{dI_T}{dt} = \frac{1}{2} \lambda I^2 + \bar{P}A^* \quad (8)$$

Donde  $I_T$  es el Impulso total.

#### Modelo de ionización:

Se utiliza el modelo de ionización presentado en [6]:

$$\frac{n_e n_p}{n_{PTFE}} = \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} e^{-I_p/k_B T} \quad (9)$$

Donde  $T$  es la temperatura,  $m_e$  la masa del electrón,  $I_p$  es el potencial de ionización,  $n_e$ ,  $n_p$  y  $n_{PTFE}$  son la densidad de partículas de electrones, protones y total del teflón,  $h$  y  $k_B$  son las constantes de Planck y Boltzmann, respectivamente.

Como aquí consideramos que la cantidad de partículas positivas y negativas es la misma, entonces:

$$n_{PTFE} = \frac{n_e^2}{\left[ \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} e^{-I_p/k_B T} \right]}$$

Llamamos

$$A = \frac{1}{\left[ \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} e^{-I_p/k_B T} \right]}$$

Y sabiendo que

$$n_{PTFE} = \frac{\rho_g}{m_{PTFE}} - n_e$$

Donde  $\rho_g$  es la densidad del gas, y  $\overline{m_{PTFE}}$  es la masa molecular del teflón. Combinando

$$\frac{n_e^2}{A} + n_e - \frac{\rho_g}{m_{PTFE}} = 0$$

Ecuación de segundo grado que se resuelve fácilmente, obteniendo la densidad de partícula de iones en el plasma:

$$n_e = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4A \frac{\rho_g}{m_{PTFE}}}}{2A} \quad (10)$$

#### *Aclaración sobre el modelo utilizado*

Al analizar detenidamente el modelo, se puede apreciar que:

- Las ecuaciones (7) y (8) están desacopladas del resto.
- No se está teniendo en cuenta las propiedades de los materiales que componen los electrodos, como por ejemplo, la emisión termiónica (capacidad de emitir iones) [4].

#### **Resolución del sistema de ecuaciones**

Las ecuaciones diferenciales planteadas se resolvieron mediante la implementación en OCTAVE de un código desarrollado para tal fin.

El programa consta de un cuerpo principal, en donde se definen las variables y se cargan los datos necesarios para el cálculo. El sistema de ecuaciones está planteado dentro una función, para luego ser resuelto dentro del cuerpo principal, mediante la función de Octave 'lsode', la cual utiliza el 'Livermore Solver' [6].

A continuación se enumeran los parámetros de entrada y salida del código.

#### **Entradas de datos**

*Parámetros geométricos:*

- Radio cátodo.
- Radio ánodo.
- Longitud de cámara de reacción.
- Longitud de pastilla de teflón.

*Parámetros eléctricos:*

- Voltaje de funcionamiento del banco de capacitores.
- Capacidad.
- Inductancia total del circuito.
- Resistencia total del circuito.
- Gradiente de inductancia en la cámara de reacción.

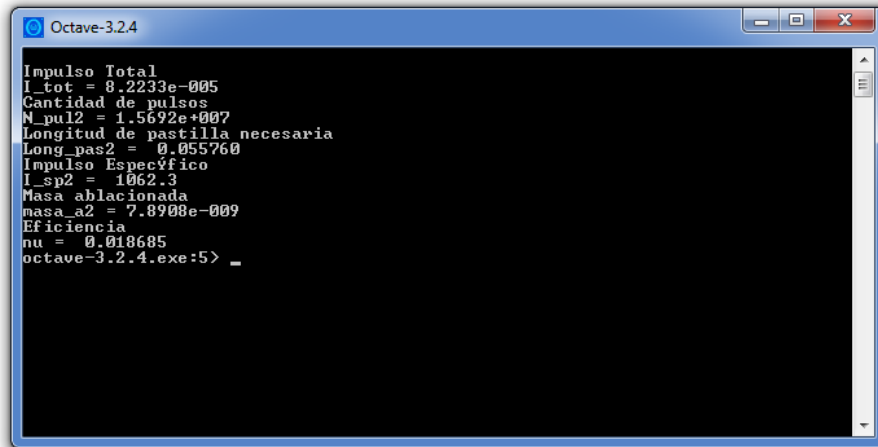
#### **Salida de datos**

*Valores numéricos:* mostrados en consola. Ejemplo en la **Figura 3**.

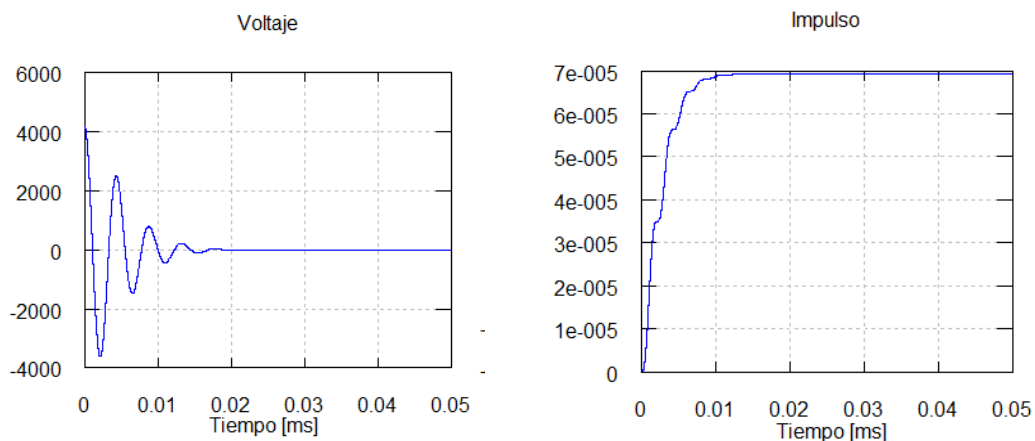
- Bit-Impulso
- Impulso específico
- Masa ablacionada
- Cantidad necesaria de combustible
- Eficiencia

Gráficos: variación de parámetros de salida con respecto al tiempo. Ejemplo en la **Figura 4**.

- Voltaje
- Corriente
- Masa ablacionada
- Temperatura
- Masa en el volumen de control
- Bit-Impulso
- Impulso específico
- Ionización



**Figura 3.** Resultados numéricos mostrados en consola.



**Figura 4.** Respuesta en el tiempo del voltaje [V] y del bit-impulso [ $\mu\text{Ns}$ ].

### Calibración del código

Una vez planteado el modelo y desarrollado el programa, los resultados obtenidos del mismo son comparados con los datos relevados en la campaña de ensayos número 12 del PPPA P4S-1.

### Parámetros de ajuste

Dentro del modelo existen dos parámetros que, debido a que su determinación teórica es compleja, no pueden ser simulados apropiadamente. Es por esto que dichas variables se utilizan para ajustar el resultado del software, para así acercarlos lo más posible a los resultados experimentales.

*Superficie irradiante*, dentro del cuerpo principal del programa: es la superficie a través de la cual se considera que irradia el plasma. Posee el orden de magnitud de la superficie que envuelve a la cámara de reacción, por lo que éste valor está limitada por ésta última.

**Valor final de calibración:**  $26.5e-4 \text{ m}^2$ .

*Delta de conductividad térmica inicial:* distancia a través de la cual se da la conducción al nacer el arco, en el instante inicial de la descarga.

**Valor final de calibración:**  $8e-6$  m.

La calibración propiamente dicha se logra haciendo variar tales valores, -dentro de cierto rango luego de algunas pruebas aisladas- a través de una rutina de barrido, hasta hacerlos coincidir con las mediciones de:

- Bit-impulso (Impulso por descarga)
- Masa ablacionada por descarga
- Frecuencia, período y amplitud de la respuesta en el tiempo del voltaje medido durante un pulso.

La **Figura 5** muestra la comparación entre resultados teóricos y experimentales. Puede observarse que no se aprecia con precisión y a simple vista el momento en que el ensayo comienza- a causa del ruido en la medición-, por lo que es necesario utilizar algún criterio para definir tal instante:

La curva debe ser ajustada para hacer coincidir el instante en que se da la descarga en ambos. Esto se lleva a cabo minimizando la diferencia entre ambas curvas, mediante una rutina de minimización del error medio cuadrático entre ambas. Dicha rutina consiste en realizar un barrido del instante de inicio de descarga de la curva teórica, lo que da como resultado una serie de curvas teóricas de respuesta de voltaje. El siguiente paso consiste en calcular el error medio cuadrático entre las curvas teóricas obtenidas y la obtenida de la campaña de ensayos. Finalmente, a la curva que muestra el mínimo error le corresponde un tiempo de inicio, el cual se asume que es el instante en que comienza la descarga.

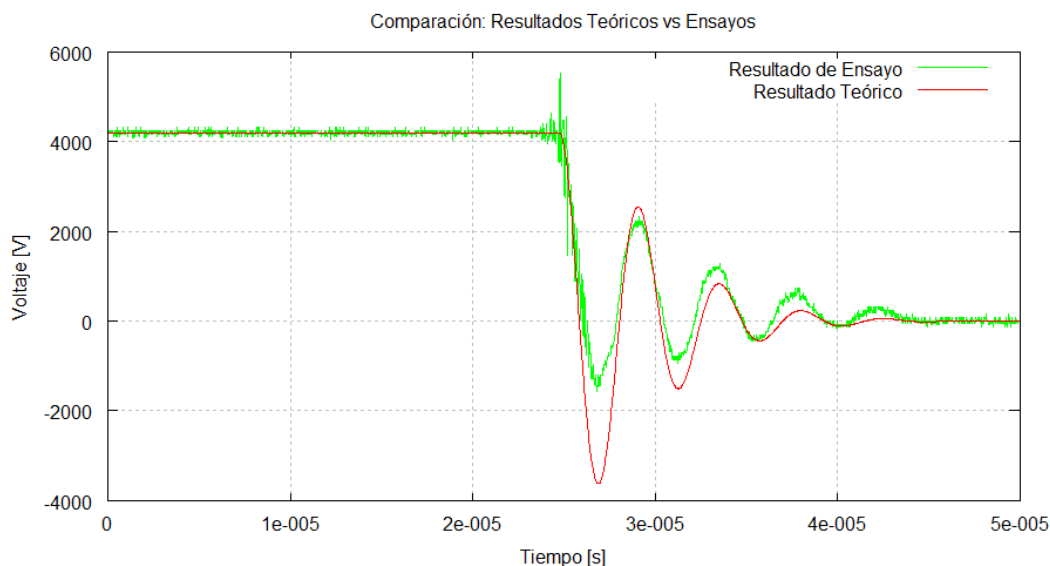
Una vez calibrado el código, existe la posibilidad de realizar dos cálculos simultáneos de dos configuraciones distintas. Esto permite contrastar la simulación de los resultados de ensayos con posibles nuevos diseños, como puede apreciarse en la **Figura 6**.

#### Límites de validez de la rutina

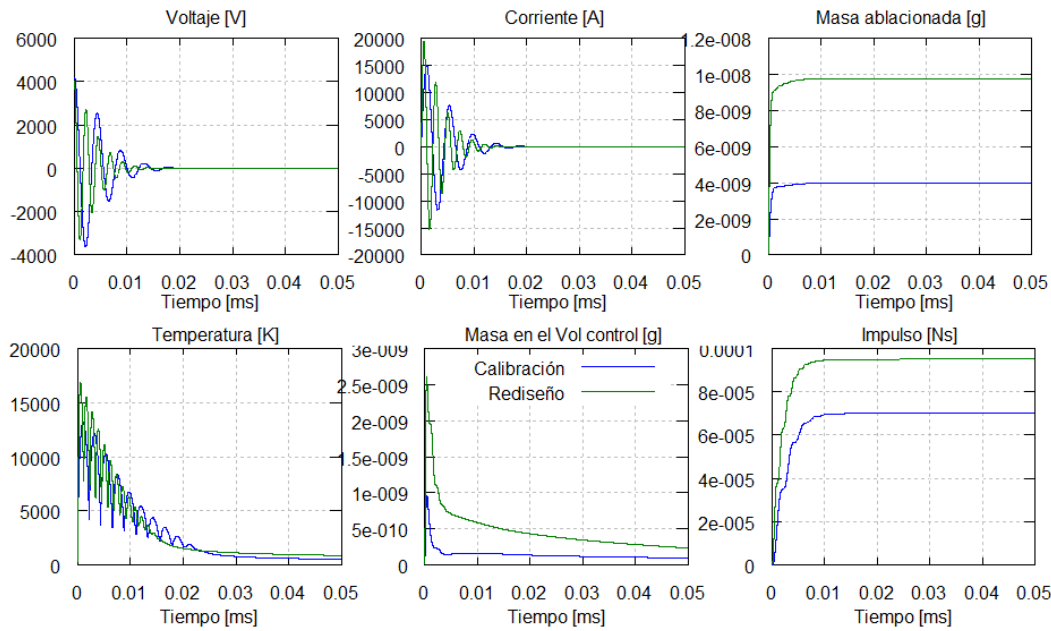
Los valores obtenidos en la calibración están ajustados para el modelo de desarrollo P4S-1, por lo que al simular el comportamiento de otras configuraciones, los resultados podrían perder fidelidad.

Si bien sería ideal la validación del código mediante la simulación de otros propulsores con resultados de ensayos conocidos, la gran dificultad para hallar información sobre configuraciones afines es un impedimento.

Teniendo en cuenta lo expuesto, se introdujo un criterio en el código, definiendo así las limitaciones y validez del mismo. El software realiza un escalamiento de los parámetros de ajuste, como medida para adaptarlos a la geometría de la cámara de reacción en simulación, para cada caso en particular. Dicho escalamiento lineal es función de la configuración geométrica y proporciones del propulsor. En consecuencia, la validez de la rutina se limita a configuraciones geométricas y tamaño similares a los del P4S-1.



**Figura 5.** Comparación de resultados.



**Figura 6.** Parámetros de salida resultantes. Comparación de distintas configuraciones.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La **Figura 5** muestra que la frecuencia es muy similar en ambas curvas -teóricas y de ensayos-, y que el período de se encuentra en el orden de los  $2 \mu s$ . Por otra parte, la amplitud no parece ajustarse tan bien, presentándose mayores diferencias entre los valles que entre los picos, del orden del 15%. Si bien la curva teórica muestra un mayor amortiguamiento, las dos parecen estabilizarse y llegar a cero aproximadamente a los  $20 \mu s$ .

Existen otros dos parámetros importantes en la calibración: la masa ablacionada y el bit-impulso. Ambos han podido ser relevados de los ensayos, y sus valores son  $3.95e-9$  Kg, y  $70e-5$  N [8], respectivamente. Así mismo, los resultados teóricos son  $3.99e-9$  Kg para la masa ablacionada y  $70.04e-5$  N para el bit-impulso.

## CONCLUSIONES

Los valores correspondientes a la masa ablacionada y bit-impulso han podido ajustarse satisfactoriamente, siendo la primera la que presenta una mayor diferencia con respecto a los resultados de ensayo, encontrándose en el orden del 1%, lo cual es aceptable.

Con respecto al comportamiento de la curva de voltaje de salida durante la descarga, las diferencias son mayores en ciertos aspectos. La mayor discrepancia se da en la amplitud de la respuesta, sobretudo en el primer y segundo valle, y en los siguientes picos, probablemente debido a la diferencia en la amortiguación mostrada en cada curva. Por otra parte, la frecuencia muestra un mejor ajuste, así como el tiempo transcurrido hasta la estabilización de la respuesta.

Se considera, entonces, que el modelo utilizado se acerca lo suficiente a la realidad, como para permitir análisis y diseño de motores de Plasma Pulsante de Propulsante Sólido, a través de una rutina ya calibrada para geometrías similares.

Si bien hay ciertas diferencias en cuanto a la amplitud de la respuesta, en los gráficos de voltaje de salida, se consideró que los parámetros restantes tienen más peso en cuando al análisis del modelo, con lo cual la herramienta puede considerarse útil en el diseño y optimización de PPPA, ya que permite analizar cómo influyen diversos parámetros de diseño.



## REFERENCIAS

1. Claude Martín Brito: Modelo para la Predicción de las Performances de un Módulo Propulsor de Plasma Pulsante Ablativo de Teflón; Trabajo Final de la carrera de Ing. Mec. Aeronáutica, 2000.
2. Robert G. Jahn: Physics of Electrics Propulsion; McGraw-Hill, 1968.
3. Thorne, Kip S. & Blandford, Roger D.: Modern Classical Physics: Optics, Fluids, Plasmas, Elasticity, Relativity, and Statistical Physics, Princeton university Press, 2014.
4. L. Spitzer Jr: Physics of Fully Ionized Gases; Interscience, New York, 1956.
5. Brito, H. H. et al: "A Review of Design and Development Works on the P4S-1 Pulsed Plasma Thruster," IAF Paper No. 01-S.4.03, 52nd International Astronautical Congress, Toulouse, France, October 2001.
6. Krishnan, Radhakrishnan & Hindmarsh, Alan C.: Description and Use of LSODE, the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations, Lawrence Livermore National Laboratory Report, 1993.